

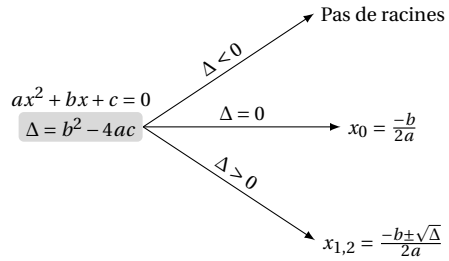
## PARTIE I - NOTIONS DE SURVIE

### Polynômes du 1<sup>er</sup> degré

$$ax + b = 0 \iff x = \frac{-b}{a}$$

$x$	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $(-a)$ 0 signe de $a$		

### Polynômes du 2<sup>nd</sup> degré



$x$	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	signe de $a$	

$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$
$P(x)$	signe de $a$	0	signe de $a$

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
$P(x)$	sig. $a$	0	sig. $(-a)$	0	sig. $a$

### Identités remarquables

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

### Proportionnalité (produit en croix)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \times d = c \times b$$

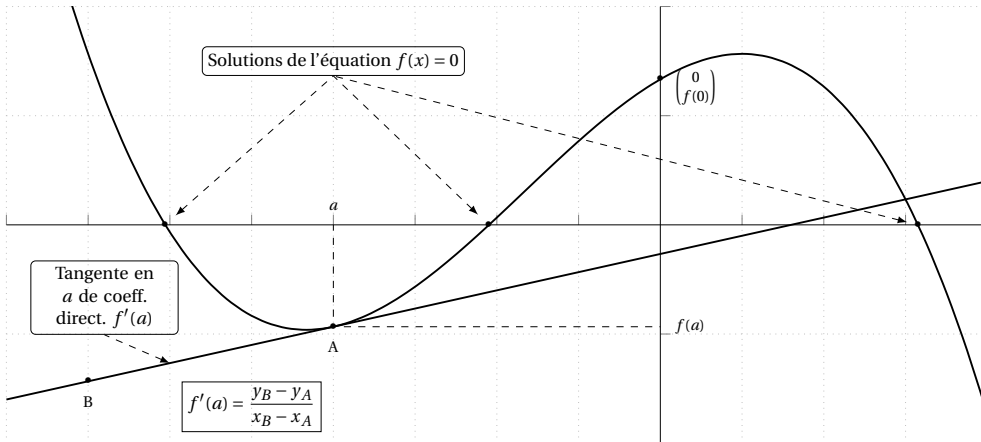
### Pour résoudre une équation (sauf 1<sup>er</sup> degré)

- je passe tout dans le membre de gauche
- je factorise
- j'utilise le théorème du produit nul :  
 $A \times B = 0 \iff A = 0$  ou  $B = 0$

### Pour résoudre une inéquation

- mêmes étapes qu'une équation
- je dresse en plus un tableau de signes

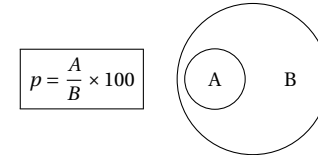
### Lecture graphique



## PARTIE II - LES POURCENTAGES

$t\%$  de de  $N$  s'obtient en calculant :  $\frac{t}{100} \times N$

La proportion  $p$  en pourcentage que représente  $A$  dans  $B$  est :



Augmenter ou diminuer une quantité de  $t\%$  revient à la multiplier par :

$$CM = 1 - \frac{t}{100}$$

dans le cas d'une diminution

$$CM = 1 + \frac{t}{100}$$

dans le cas d'une augmentation

Dans le cas d'évolutions successives, on calcule le CM global en multipliant les CM entre eux :

$$CM_g = CM_1 \times CM_2 \times \dots$$

Pour retrouver le taux  $t$  connaissant le CM (le signe indiquant une augmentation ou une diminution) :

$$t = (CM - 1) \times 100$$

Formule classique du taux d'évolution connaissant les valeurs de départ et d'arrivée :

$$t = \frac{v_a - v_d}{v_d} \times 100$$

Formule du coefficient multiplicateur réciproque  $CM_r$  connaissant le CM (permet de trouver le taux qui compense une évolution de  $t\%$ ) :

$$CM_r = \frac{1}{CM}$$

## PARTIE III - LES FONCTIONS

### Application à l'économie

	Notation	Remarques
<b>Coût total</b> de production	$C(x)$ ou $C_T(x)$	coûts fixes : $C(0)$
<b>Coût marginal</b>	$C_m(x) = C'(x)$	coût de la dernière unité produite
<b>Coût moyen</b>	$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$	coût moyen unitaire
<b>Recette</b> ou chiffres d'affaires	$R(x) = p \times x$	$p$ est le prix de vente unitaire
<b>Bénéfice</b>	$B(x) = R(x) - C(x)$	⚠ attention au $-$ devant $C(x)$

### Méthode pour étudier les variations d'une fonction $f$

- je calcule  $f'(x)$
- j'étudie le signe de  $f'(x)$  en dressant son tableau de signes
- je déduis les variations de  $f$

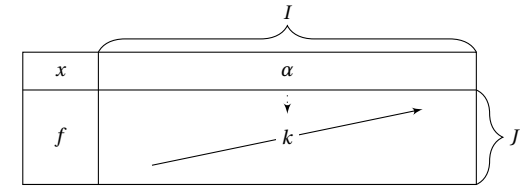
### Tableaux des dérivées et des primitives

Fonction $f$	Dérivée $f'$
$x^n$	$nx^{n-1}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$e^x$	$e^x$
$ku$	$ku'$
$u^n$	$nu'u^{n-1}$
$uv$	$u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$e^u$	$u'e^u$

Fonction $f$	Primitive $F$
$x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x^n}, n \neq 1$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
$e^{ax+b}$	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln(ax+b)$
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{u^n}, n \neq 1$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{u^{n-1}}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'e^u$	$e^u$

### Rédaction-type du théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

- $f$  est **continue** et **strictement croissante (ou décroissante)** sur  $I$ .
- calculer les bornes de l'intervalle image  $J$ .
- $k \in J$  donc d'après le TVI, l'équation  $f(x) = k$  admet une seule et unique solution  $\alpha$ .
- balayage à la calculatrice** pour déterminer un encadrement de  $\alpha$



### Étude de position :

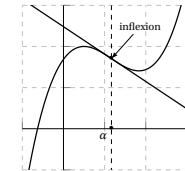
Pour étudier la position de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à  $\mathcal{C}_g$ , on étudie le signe de  $f(x) - g(x)$  avec un tableau de signes.

### Équation de la tangente en $a$ :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

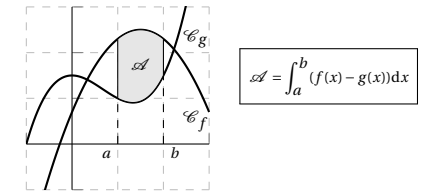
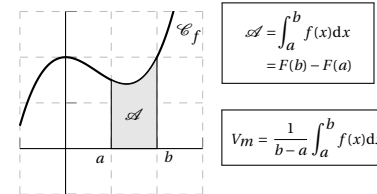
### Concavité - convexité : on étudie le signe de la dérivée seconde $f''(x)$

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f''(x)$		0	
$f$	concave		convexe

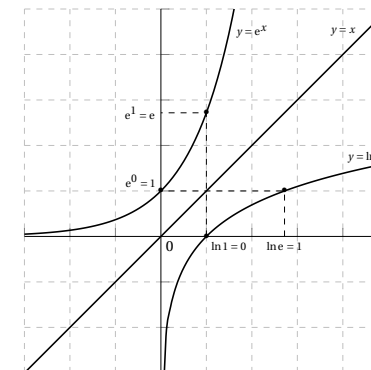


- sur  $] -\infty; \alpha[$ ,  $f$  est **concave** donc  $\mathcal{C}_f$  est entièrement située **en-dessous** de ses tangentes;
- sur  $] \alpha; +\infty[$ ,  $f$  est **convexe** donc  $\mathcal{C}_f$  est entièrement située **au-dessus** de ses tangentes;
- en  $\alpha$ ,  $\mathcal{C}_f$  admet un point d'inflexion.

### Calcul d'une aire à partir d'une intégrale



### Fonction exponentielle et logarithme



$$e^{a+b} = e^a \times e^b \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$(e^a)^n = e^{na} \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^n = n \ln a \quad \ln \frac{1}{b} = -\ln b$$

$$\ln e^x = e^{\ln x} = x$$

## PARTIE IV - LES SUITES

Nature	ARITHMÉTIQUE	GÉOMÉTRIQUE
$u_{n+1} = f(u_n)$	$\begin{cases} u_p \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$	$\begin{cases} v_p \\ v_{n+1} = qv_n \end{cases}$
$u_n = f(n)$	$\begin{aligned} u_n &= u_0 + nr \\ &= u_1 + (n-1)r \\ &= u_2 + (n-2)r \\ &= \dots \end{aligned}$	$\begin{aligned} v_n &= v_0 \times q^n \\ &= v_1 \times q^{n-1} \\ &= v_2 \times q^{n-2} \\ &= \dots \end{aligned}$
Somme de $u_p$ à $u_n$	$\underbrace{(n-p+1)}_{\text{nombre de termes}} \times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$	premier $\times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$
Pour démontrer	$u_{n+1} - u_n = \dots = r$	$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \dots = q$ $v_{n+1} = \dots = qv_n$

### • Limites de suites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < q < 0 \text{ ou } 0 < q < 1 \\ +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ \text{diverge} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$$

### • Variations de suites

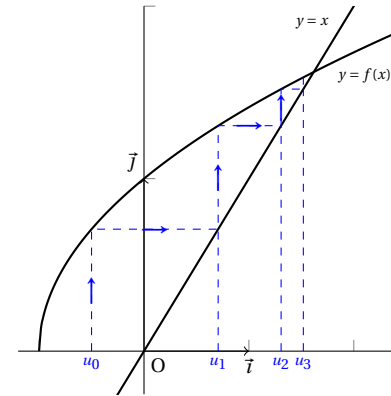
$$u_{n+1} - u_n \begin{cases} > 0 \Rightarrow (u_n) \text{ est strictement croissante} \\ < 0 \Rightarrow (u_n) \text{ est strictement décroissante} \\ = 0 \Rightarrow (u_n) \text{ est stationnaire ou constante} \end{cases}$$

⚠ Si  $u$  est définie explicitement c'est-à-dire que  $u_n = f(n)$  alors  $u$  a les mêmes variations que la fonction  $f$  qui la définit sur  $\mathbb{N}$ .

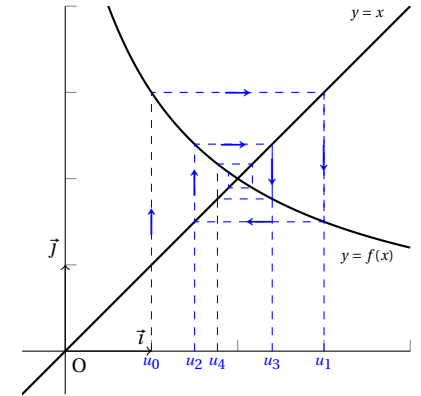
### • Méthode pour montrer qu'une suite $(v_n)$ est géométrique

1. En général, on a  $v_n = u_n + \alpha$  donc on déduit **immédiatement** que  $u_n = v_n - \alpha$ .
2. On part sur le calcul de  $v_{n+1}$  en utilisant la définition de  $v_n$ .
3. On remplace  $u_{n+1}$  par sa définition (voir énoncé).
4. On effectue les calculs.
5. On remplace  $u_n$  par  $u_n = v_n - \alpha$ .
6. On effectue les calculs.
7. On obtient  $v_{n+1} = qv_n$  donc  $(v_n)$  est bien géométrique et on déduit que  $v_n = v_0 \times q^n$ .
8. Comme  $u_n = v_n - \alpha$ , on a alors  $u_n = v_0 \times q^n - \alpha$ .

### • Construction graphique des termes de $(u_n)$ dans le cas d'une définition récurrente : $u_{n+1} = f(u_n)$



Croissante convergente



"Escargot" convergent

1. On part de  $u_0$ .
2. On prend son image par  $f$  :  $u_1 = f(u_0)$ .
3. On rabat  $u_1$  sur l'axe des abscisses grâce à  $y = x$ .
4. On répète cette procédure avec  $u_1$ , puis  $u_2$ , puis  $u_3$ , et ainsi de suite ...
5. On peut alors conjecturer les variations de la suite et sa limite.

### • Algorithmes à connaître

Exemple à adapter en fonction de la suite étudiée, ici  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = 2u_n + 5$ .

```

Affecter à U la valeur 1
Affecter à N la valeur 0
Demander la valeur de K
TANT QUE (N < K) FAIRE
  Affecter à U la valeur 2 × U + 5
  Affecter à N la valeur N + 1
FIN TANT QUE
Afficher U
    
```

① Calcul du terme de rang  $K$

```

Affecter à U la valeur 1
Affecter à N la valeur 0
Demander la valeur de M
TANT QUE (U < M) FAIRE
  Affecter à U la valeur 2 × U + 5
  Affecter à N la valeur N + 1
FIN TANT QUE
Afficher N
    
```

② Algorithme de seuil

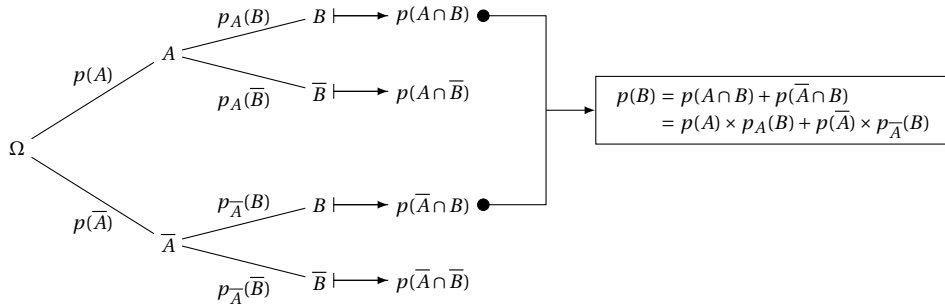
⚠ Pour l'algorithme ①, si on veut faire afficher **tous les termes**, il faut placer l'affichage **dans la boucle**.

## PARTIE V - LES PROBABILITÉS

### Formules fondamentales

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \implies p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) \quad p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

### Arbre de probabilités



Si A et B sont indépendants :  $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ .

### Loi binomiale

- On reconnaît un schéma de Bernoulli dans lequel on répète  $n$  fois de manière **identiques** et **indépendantes** une épreuve à deux issues (*Succès - Échec*) et dont la probabilité du succès est  $p$ .
- Soit  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.
- $X$  suit alors une *loi binomiale* de paramètres  $n$  et  $p$  noté  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ .

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad p(X \geq k) = 1 - p(X < k) \quad E(X) = np$$

### Loi binomiale à la calculatrice

	Ti	Casio
	<code>2nd</code> + <code>VARS</code>	<code>OPTN</code> + <code>STAT</code> + <code>DIST</code> + <code>BINM</code>
$p(X = k)$	<code>BinomFdp(n,p,k)</code>	<code>Bpd(k,n,p)</code>
$p(X \leq k)$	<code>BinomFrep(n,p,k)</code>	<code>Bcd(k,n,p)</code>
	<code>MATH</code> + <code>PRB</code>	<code>OPTN</code> + <code>PROB</code>
$\binom{n}{k}$	$n$ Combinaison $k$	$n$ nCr $k$

**Question classique** : on cherche la probabilité de réalisation **d'au moins 1 succès**

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$$

### Lois continues

Accès au menu de la calculatrice pour calculer avec une loi normale :

- Sur *Ti* : `2nd` + `VARS`
- Sur *Casio* : `OPTN` + `STAT` + `DIST` + `NORM`

	Loi uniforme sur $[c; d]$	Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$	Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
Allure graphique			
$p(a \leq X \leq b)$	$\frac{b-a}{d-c}$	<code>NormalFRep(a,b,0,1)</code> <code>NormCD(a,b,1,0)</code>	<code>NormalFRep(a,b,mu,sigma)</code> <code>NormCD(a,b,sigma,mu)</code>
$p(X \leq b)$	$\frac{b-c}{d-c}$	<code>NormalFRep(-10^99,b,0,1)</code> <code>NormCD(-10^99,b,1,0)</code>	<code>NormalFRep(-10^99,b,mu,sigma)</code> <code>NormCD(-10^99,b,sigma,mu)</code>
$p(X > b)$	$\frac{d-b}{d-c}$	<code>NormalFRep(a,10^99,0,1)</code> <code>NormCD(a,10^99,1,0)</code>	<code>NormalFRep(a,10^99,mu,sigma)</code> <code>NormCD(a,10^99,sigma,mu)</code>
Espérance	$\frac{c+d}{2}$	0	$\mu$

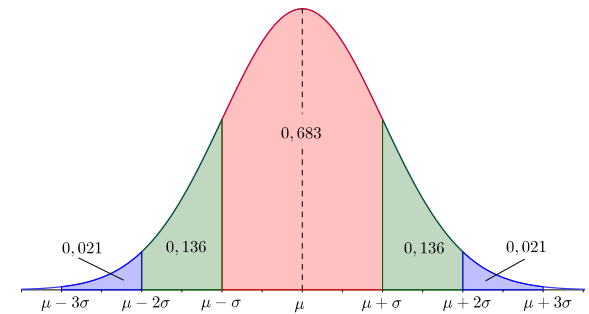
### Loi normale : Utilisation de l'inverse normale

On cherche la valeur de  $k$  tel que  $p(X \leq k) = p$  :

$$k = \text{FracNormale}(p, \mu, \sigma) \rightarrow \text{Ti} \\ = \text{InvNormCD}(p, \sigma, \mu) \rightarrow \text{Casio}$$

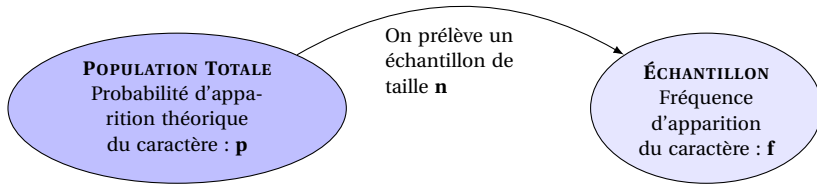
### Loi normale : plages de normalité à connaître

$$p(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \simeq 0,683 \\ p(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \simeq 0,954 \\ p(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \simeq 0,997$$



## PARTIE VI - ÉCHANTILLONNAGE ET ESTIMATION

### VI.1 Échantillonnage



↔ **Intervalle de fluctuation asymptotique à 95%**

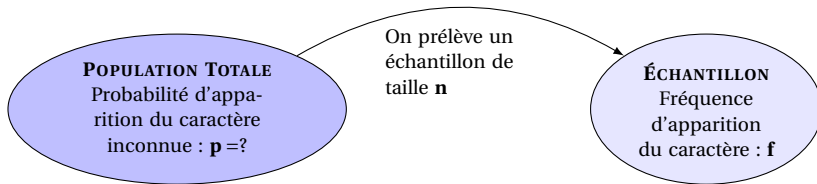
⚠ Pensez à vérifier que les conditions pour calculer l'intervalle sont vérifiées :

- $n \geq 30$
- $np \geq 5$
- $n(1-p) \geq 5$

$$I = \left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

Conclusion : Si  $f \in I$  alors on considère que l'échantillon est représentatif de la population.

### VI.2 Estimation



↔ **Intervalle de confiance au niveau de confiance de 95%**

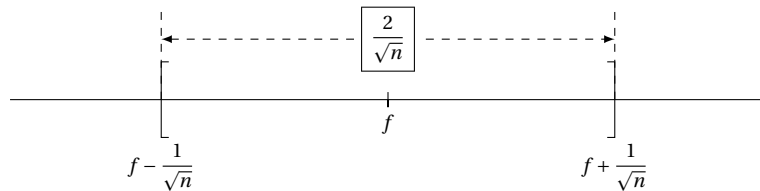
⚠ Pensez à vérifier que les conditions pour calculer l'intervalle sont vérifiées :

- $n \geq 30$
- $nf \geq 5$
- $n(1-f) \geq 5$

$$IC = \left[ f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Conclusion : On estime avec un certain niveau de confiance que la probabilité inconnue  $p \in IC$ .

↔ **Amplitude de l'intervalle de confiance**



On cherche la taille  $n$  de l'échantillon à prélever tel que  $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq A$

## PARTIE VII - ALGORITHME ET CODAGE

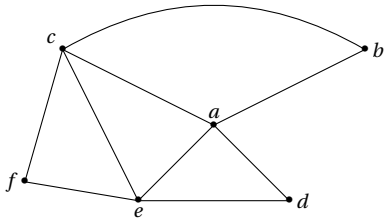
Instructions	Syntaxe CASIO	Syntaxe TI
Accès aux commandes	Menu PRGM COM ou REL	PRGM puis CTL ou E/S 2nd + MATH → TEST
Afficher du texte	"BLA BLA" ↵	:Disp "BLA BLA"
Afficher(x)	X ↵	:Disp X
Saisir(x)	"X="? → X ↵	:Prompt X
Affectation	5 → X ↵	:5 → X
Structure IF	If (X<10) ↵ Then "MOINS DE DIX" ↵ Else "PLUS DE DIX" ↵ IfEnd ↵	:If (X=10) Then :Disp "DIX" :Else :Disp "PAS DIX" :End
Structure FOR	For 1 → K To 10 ↵ "K VAUT " : K ↵ Next ↵	:For (K,1,10) :Disp "K VAUT ",K :End
Structure WHILE	While (N<10) ↵ N+1 → N ↵ WhileEnd ↵	:While (N<10) :N+1 → N :End

## PARTIE VIII - SPÉCIALITÉ

### VIII.1 Les graphes

- **Ordre d'un graphe** : nombre de sommets du graphe
- **Degré d'un sommet** : nombre d'arêtes issues d'un même sommet
- **Sommets adjacents** : sommets reliés par une arête
- **Chaîne ou chemin** : suite de sommets reliés par des arêtes
- **Longueur d'une chaîne** : nombre d'arêtes d'une chaîne
- **Cycle** : chaîne fermée (sommet de départ = sommet d'arrivée) dont toutes les arêtes sont distinctes
- **Graphe connexe** : deux sommets quelconques sont reliés entre eux par une chaîne
- **Graphe complet** : les sommets sont 2 à 2 adjacents
- **Chaîne eulérienne** : chaîne contenant une fois et une seule chacune des arêtes
- **Cycle eulérien** : chaîne eulérienne fermée
- **Théorème d'Euler** :
  - un graphe connexe contient une chaîne eulérienne si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair
  - un graphe connexe contient un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair

• **Exemple :**



- \* Graphe connexe d'ordre 6
- \* Le sous-graphe {a; d; e} est complet
- \* Les sommets a et c sont adjacents
- \* Chaîne de longueur 3 : f - c - e - a
- \* Cycle longueur 4 : c - a - d - e - c
- \* Degré des sommets :

Sommet	a	b	c	d	e	f
Degré	4	2	4	2	4	2

\* Matrice d'adjacence :

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\
 \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M
 \end{matrix}$$

\* Tous les sommets sont d'ordre pair donc il existe un **cycle eulérien** : b - a - d - e - a - c - e - f - c - b ⇒ c'est un cycle qui contient **toutes les arêtes du graphe**

\* La matrice  $M^n$  permet de déterminer le nombre de chemins de longueur n permettant de se rendre d'un sommet à un autre

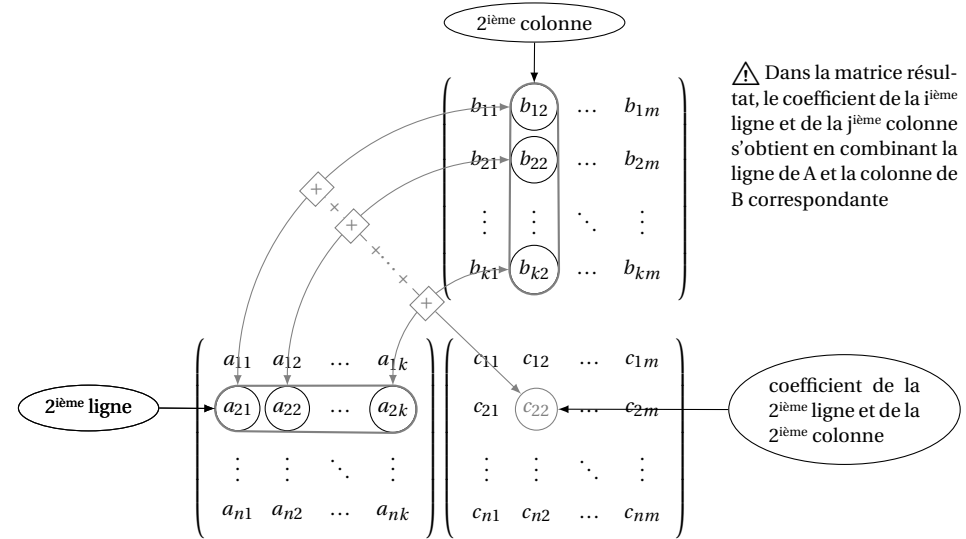
• **Algorithme de coloration d'un graphe :**

- permet d'affecter une couleur à chaque sommet de sorte que 2 sommets adjacents ne partagent pas la même couleur
- le **nombre chromatique** d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs permettant de le colorier

• **Algorithme de DIJKSTRA** ou **algorithme du plus court chemin** permet, pour un graphe pondéré, de déterminer le plus court chemin entre deux sommets d'un graphe

### VIII.2 Les matrices

• **Produit de matrices :**



⚠ Dans la matrice résultat, le coefficient de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne s'obtient en combinant la ligne de A et la colonne de B correspondante

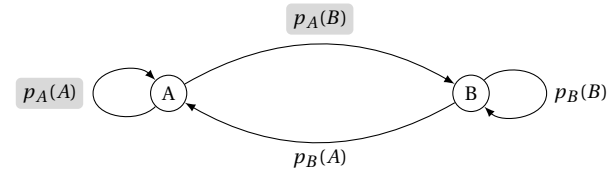
• **Propriétés :** A, B et C sont du même ordre n.

- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- pour tout réel k,  $k \times (A \times B) = A \times (k \times B)$
- ⚠ En général,  $A \times B \neq B \times A$
- $A \times A \times \dots \times A = A^n$  (n fois)
- $A^m \times A^n = A^{m+n}$
- $(A^n)^p = A^{n \times p}$
- pour tout réel k,  $(kA)^n = k^n A^n$

• **Matrice inverse :**

- $A \times B = B \times A = I_n \iff B$  est l'inverse de A et B est notée  $A^{-1} \iff A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I_n$
- $I_n \times A = A \times I_n = A$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $A \times X = B \iff A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B \iff X = A^{-1} \times B$  (Résolutions de système d'équations)

• **Matrice de transition associée à un diagramme de changement d'état :**



\* Si l'état initial est décrit par une **matrice colonne**  $P_0$  alors la somme de chaque **colonne** de M vaut 1

$$P_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} p_A(A) & p_B(A) \\ p_A(B) & p_B(B) \end{pmatrix}$$

$$P_{n+1} = M \times P_n \implies P_n = M^n \times P_0$$

\* État stable  $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  tel que  $P = M \times P$

\* Si l'état initial est décrit par une **matrice ligne**  $P_0$  alors la somme de chaque **ligne** de M vaut 1

$$P_0 = (a \quad b) \quad M = \begin{pmatrix} p_A(A) & p_A(B) \\ p_B(A) & p_B(B) \end{pmatrix}$$

$$P_{n+1} = P_n \times M \implies P_n = P_0 \times M^n$$

\* État stable  $P = (x \quad y)$  tel que  $P = P \times M$