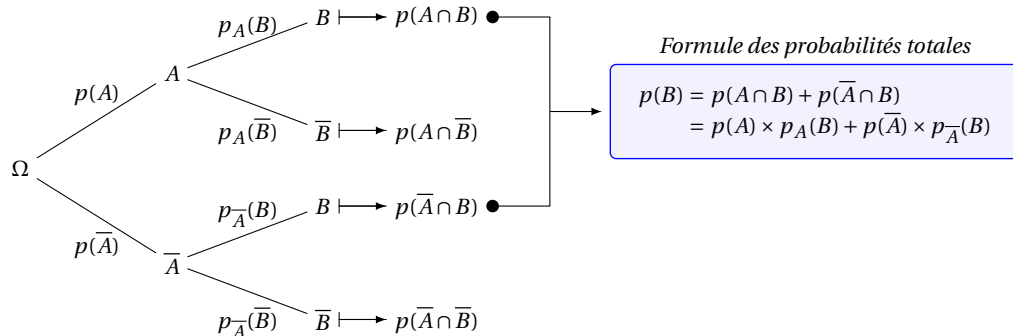


## LES PROBABILITÉS

### Représentation par un arbre pondéré



### Formules

Probabilité conditionnelle	$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$
Formule de la réunion	$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
Si A et B indépendants	$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

### Loi binomiale

On répète  $n$  fois de manière **identiques** et **indépendantes** une épreuve à deux issues (*Succès - Échec*) dont la probabilité du succès est  $p$ . Soit  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. Alors  $X$  suit alors une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  noté  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ .

$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$E(X) = np$

$V(X) = np(1-p)$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

La probabilité de réalisation **d'au moins 1 succès** est  $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$  avec  $\binom{n}{0} = 1$

### Dénombrement

Tirage <b>successif avec remise</b> de $p$ éléments parmi $n$ (ordre et répétition)	$n^p$
Tirage <b>successif sans remise</b> de $p$ éléments parmi $n$ (ordre, pas de répétition)	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Tirage <b>successif sans remise</b> de $n$ éléments parmi $n$ (nombre de permutations)	$n! = n \times (n-1)!$ $= n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$
Tirage <b>simultané</b> de $p$ éléments parmi $n$ (pas d'ordre, pas de répétition)	$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

### Variables aléatoires

#### Loi de probabilité de X

$X$	$x_0$	$x_1$	$\dots$	$x_n$
$p(X = x_i)$	$p_0$	$p_1$	$\dots$	$p_n$

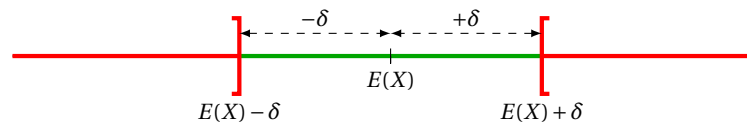
#### Formules

Espérance (moyenne)	$E(X) = \sum x_i \times p_i = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n$
Variance	$V(X) = \sum (x_i - E(X))^2 \times p_i = E(X^2) - (E(X))^2$
Écart-type	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

#### Somme de variables aléatoires indépendantes

Espérance	$E(aX) = aE(X)$ $E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$
Variance	$V(aX) = a^2 V(X)$ $V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$
Moyenne d'un échantillon	$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$
Espérance d'un échantillon	$E(M_n) = E(X)$
Variance d'un échantillon	$V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$

### Inégalité de Bienaymé-Tchebychev



**Majoration** de la probabilité que l'écart à la moyenne soit **supérieure ou égale** à  $\delta$

$$p(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

**Minoration** de la probabilité que l'écart à la moyenne soit **strictement inférieure** à  $\delta$

$$p(|X - E(X)| < \delta) \geq 1 - \frac{V(X)}{\delta^2}$$

### Inégalité de Markov

$$p(X \geq \delta) \leq \frac{E(X)}{\delta}$$

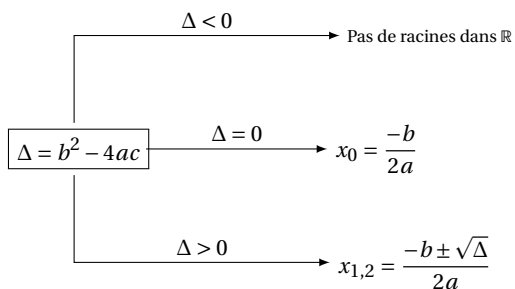
## LES FONCTIONS

### Polynôme du 1<sup>er</sup> degré

$$ax + b = 0 \iff x = \frac{-b}{a}$$

$x$	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $(-a)$ $0$ signe de $a$		

### Polynôme du 2<sup>nd</sup> degré

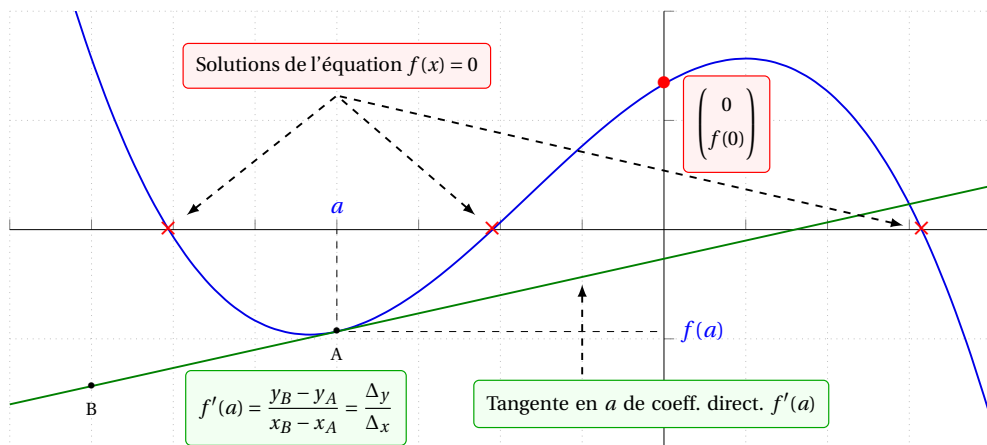


$x$	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$	signe de $a$		

$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$
$P(x)$	signe de $a$ $0$ signe de $a$		

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
$P(x)$	sig. $a$	$0$ sig. $(-a)$	$0$ sig. $a$	

### Lecture graphique



### Équation de la tangente en $a$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

### Tableaux des dérivées

$x^n$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\ln x$	$e^x$	$u^n$	$uv$	$\frac{1}{u}$	$\frac{u}{v}$	$\sqrt{u}$	$\ln u$	$e^u$
$nx^{n-1}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x}$	$e^x$	$nu'u^{n-1}$	$u'v + uv'$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\frac{u'}{u}$	$u'e^u$

### Tableaux des primitives

$x^n$	$\frac{1}{x^n} \ (n \geq 2)$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x}$	$u'u^n$	$\frac{u'}{u^n} \ (n \geq 2)$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$\frac{u'}{u}$	$u'e^u$
$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}$	$2\sqrt{x}$	$\ln x$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{u^{n-1}}$	$2\sqrt{u}$	$\ln u$	$e^u$

### Limites du type

$$\frac{k}{\pm\infty} = 0^\pm \quad \frac{k}{0^\pm} = \pm\infty \quad \pm\infty \times \pm\infty = \pm\infty$$

⚠ Faire la règle des signes

### Forme indéterminée (FI)

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 0 \times \infty \quad (+\infty) + (-\infty)$$

⚠ On développe ou on factorise et/ou on utilise les croissances comparées

### Limites de référence

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

### Croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

### Interprétation graphique des limites

Asymptote horizontale d'équation $y = \ell$ en $\pm\infty$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$
Asymptote verticale d'équation $x = a$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$

### Propriétés de l'exponentielle et du logarithme

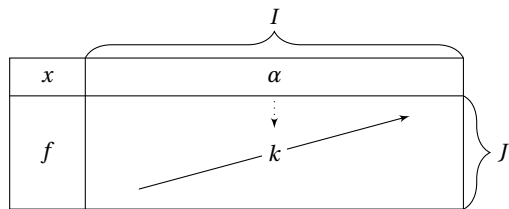
$$e^a \times e^b = e^{a+b} \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \quad (e^a)^n = e^{a \times n} \quad e^{\ln x} = x$$

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad \ln(a)^n = n \times \ln a \quad \ln e^x = x$$

• **Position relative de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à  $\mathcal{C}_g$**  : On étudie le signe de la différence  $d(x) = f(x) - g(x)$

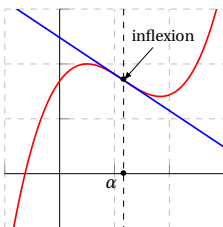
• **Théorème des valeurs intermédiaires**

- $f$  est **continue** et **strictement croissante (ou décroissante)** sur  $I$ .
- $f(x)$  prend ses valeurs dans  $J$ .
- $k \in J$  donc l'équation  $f(x) = k$  admet une unique solution  $\alpha \in I$ .



• **Convexité**

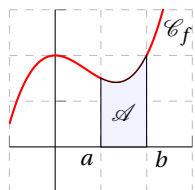
$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f''(x)$		0	
$f'$	↗ ↘		
$f$	concave		convexe
$\mathcal{C}_f$	en-dessous des tangentes		au-dessus des tangentes



• **Calcul intégral**

$\mathcal{A}$  est l'aire du domaine de plan limité par :

- la courbe  $\mathcal{C}_f$  et l'axe des abscisses d'une part;
- les deux droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$  d'autre part.



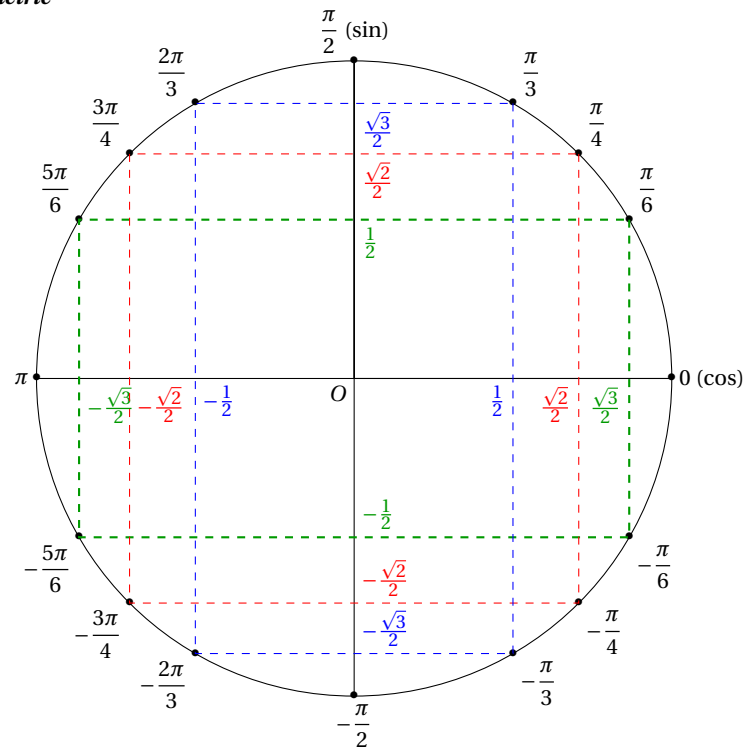
$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_a^b f(x) dx \\ &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Valeur moyenne	$V_m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$
Positivité	$f(x) \geq 0$ sur $[a; b] \iff \int_a^b f(x) dx \geq 0$
Linéarité	$\int_a^b (\alpha f(x) dx + \beta g(x) dx) = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$
Intégration par parties	$\int_a^b u' v = [uv]_a^b - \int_a^b u v'$

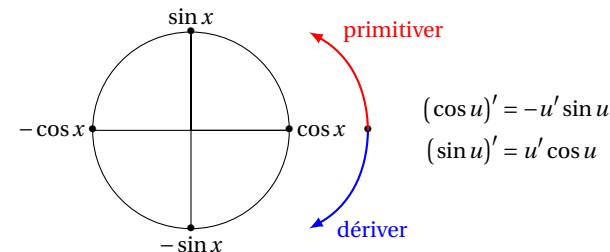
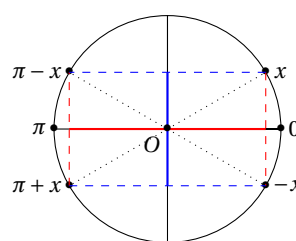
• **Équations différentielles**

$y' = ay$	$y(x) = Ce^{ax}$
$y' = ay + b$	$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$
$y' = ay + f$	$y(x) = Ce^{ax} + \text{une solution particulière}$

• **Trigonométrie**



Encadrement	$-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
Pythagore	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
Périodicité	$f(x+T) = f(x) \iff f$ est T-périodique
Paire	$f(-x) = f(x) \iff \mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à $(y'Oy)$
Impaire	$f(-x) = -f(x) \iff \mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à $O$



## LES SUITES

Nature	ARITHMÉTIQUE	GÉOMÉTRIQUE
$u_{n+1} = f(u_n)$	$\begin{cases} u_p \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$	$\begin{cases} v_p \\ v_{n+1} = qv_n \end{cases}$
$u_n = f(n)$	$\begin{aligned} u_n &= u_0 + nr \\ &= u_1 + (n-1)r \\ &= u_2 + (n-2)r \\ &= \dots \end{aligned}$	$\begin{aligned} v_n &= v_0 \times q^n \\ &= v_1 \times q^{n-1} \\ &= v_2 \times q^{n-2} \\ &= \dots \end{aligned}$
Somme de $u_p$ à $u_n$	$\underbrace{(n-p+1)}_{\text{nombre de termes}} \times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$	premier $\times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$
Pour démontrer	$u_{n+1} - u_n = \dots = r$	$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \dots = q$ $v_{n+1} = \dots = qv_n$

### • Limite de $q^n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < q < 0 \text{ ou } 0 < q < 1 \\ +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ \text{diverge} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$$

### • Théorèmes de comparaison

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \\ v_n \geq u_n \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty} \qquad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \\ v_n \leq u_n \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty}$$

### • Théorème des gendarmes

$$\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell}$$

### • Théorèmes de convergence monotone

- Toute suite croissante majorée converge.
- Toute suite décroissante minorée converge.

### • Théorème du point fixe

$$\begin{cases} f \text{ est continue} \\ u_{n+1} = f(u_n) \\ (u_n) \text{ converge} \end{cases} \Rightarrow (u_n) \text{ converge vers } \ell \text{ solution de l'équation } f(x) = x$$

### • Sens de variation

$$u_{n+1} - u_n \begin{cases} > 0 \Rightarrow (u_n) \text{ est strictement croissante} \\ < 0 \Rightarrow (u_n) \text{ est strictement décroissante} \\ = 0 \Rightarrow (u_n) \text{ est stationnaire ou constante} \end{cases}$$

### • Raisonnement par récurrence

1. **Initialisation** : on vérifie que la propriété est vraie au rang initial
2. **Hérédité** : supposons la propriété vraie au rang  $n$ , montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$   
[Écrire la propriété au rang  $n$ ]  $\Rightarrow$  [Écrire la propriété au rang  $n+1$ ]  

$$\left. \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \text{DÉMO}$$
3. **Conclusion** : la propriété étant initialisée et héréditaire, on en déduit que la propriété est vraie pour tout  $n$ .

Remarque :

En ce qui concerne la démonstration, on démarre généralement de l'hypothèse de récurrence et :

- soit on compose avec une fonction  $f$  croissante
- soit on "reconstruit" l'expression de  $u_{n+1}$

### • Algorithmes Python

Exemple à adapter en fonction de la suite étudiée, ici  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = 2u_n + 5$ .

```
##### Programme CALCUL #####
# calcule et affiche le terme de
# rang n demandé par l'utilisateur

# demander la valeur de n
n = int(input("n = "))
# initialisation u0 = 1
u = 1
# boucle de calcul
for i in range(n):
    u = 2 * u + 5
print("u = ", u)
```

```
##### Programme SEUIL #####
# affiche le rang n à partir duquel
# un devient supérieur ou égal à M

# initialisation : u0 = 1
n = 0
u = 1
while u < M: # tant que un < M
    # on calcule le terme suivant
    n = n + 1
    u = 2 * u + 5
print("n = ", n)
```

Remarques :

- dans l'algorithme de calcul, on peut afficher **tous les termes** jusqu'à  $u_n$  en plaçant `print("u = ", u)` dans la boucle `for`
- dans l'algorithme de seuil, on peut être amené à remplacer la condition `u < M` par `u > M`

### • Modélisation de problème par une suite géométrique

$$\text{Augmentation de } t \% \Rightarrow q = 1 + \frac{t}{100} \qquad \text{Diminution de } t \% \Rightarrow q = 1 - \frac{t}{100}$$

## GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

### • Calcul de $\vec{AB}$ et de sa norme

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } AB = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

### • Formule du milieu $K$ de $[AB]$

$$K \left( \frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

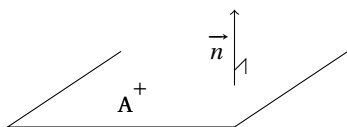
### • Colinéarité de deux vecteurs ou comment montrer que trois points sont alignés

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires si leurs coordonnées sont proportionnelles soit } \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$$

### • Orthogonalité de deux vecteurs

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul soit } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = xx' + yy' + zz' = 0$$

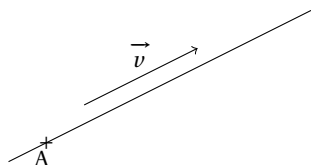
### • Équation cartésienne de plan



Le plan  $\mathcal{P}$  de vecteur normal  $\vec{n}(a; b; c)$  a pour équation  $ax + by + cz + d = 0$ .

On détermine  $d$  en remplaçant  $x, y$  et  $z$  par les coordonnées d'un point qui **appartient** au plan (ici A).

### • Représentation paramétrique de droite



La droite  $\mathcal{D}$  de vecteur directeur  $\vec{v}(a; b; c)$  passant par A a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$$

### • Intersection entre deux droites

On résout le système de 3 équations composé des équations des deux droites, par exemple :

$$\begin{cases} 2t + 1 = -k + 3 \\ t - 1 = k + 2 \\ 3t + 2 = -2k - 1 \end{cases}$$

### • Intersection entre un plan et une droite

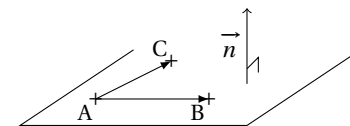
On résout le système de 4 équations composé des 3 équations de la droite et de l'équation du plan, par exemple :

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 1 \\ z = 3t + 2 \\ 2x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

### • Comment montrer qu'un vecteur est normal à un plan

On montre que  $\vec{n}$  est orthogonal à un couple de vecteurs directeurs du plan en utilisant le produit scalaire :

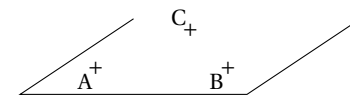
$$\vec{n} \perp (ABC) \iff \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{AB} \\ \vec{n} \perp \vec{AC} \end{cases}$$



### • Comment montrer que trois points définissent un plan

On montre que ces trois points ne sont pas alignés en utilisant la non colinéarité de deux vecteurs :

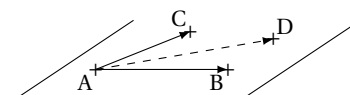
$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \frac{x}{x'} \neq \frac{y}{y'} \neq \frac{z}{z'}$$



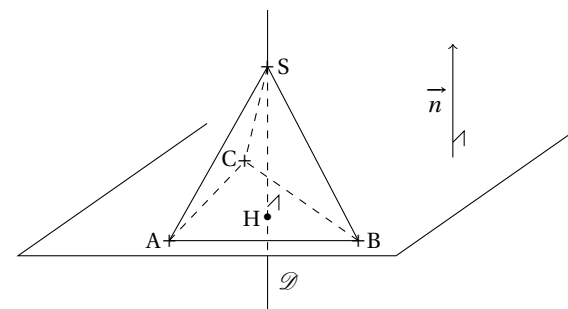
### • Comment montrer que trois vecteurs ou quatre points sont coplanaires

On montre que l'un des trois vecteurs est une combinaison linéaire des deux autres :

$$\vec{AD} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$$



### • Situation classique à connaître



- Les points A, B et C définissent un plan dont on connaît une équation cartésienne
- La droite  $\mathcal{D}$  passant par S est orthogonale au plan (ABC) et admet pour vecteur directeur  $\vec{n}$
- On définit H comme le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC)
- On cherche les coordonnées de H point d'intersection de la droite  $\mathcal{D}$  avec le plan (ABC)
- On peut calculer la distance SH qui est la distance du point S au plan (ABC)
- On peut calculer le volume de la pyramide SABC :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times SH \quad \text{avec} \quad \mathcal{A}_{ABC} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$