

CODAGE EN PYTHON

Structures de contrôle

```
# Définition de fonction
def add(a, b):
    c = a + b # affectation de a + b à c
    return c # retourne la valeur de c
# Test conditionnel SI ALORS SINON
if a == b:
    ... # bloc de code exécuté si a = b
elif a != c:
    ... # bloc de code exécuté si a différent de c
else:
    ... # bloc de code exécuté par défaut
# Boucle POUR
for i in range(0,10): # i prend successivement les valeurs de 0 à 10 non compris
    ... # bloc de code exécuté pour chaque valeur de i
for l in "bonjour": # l prend successivement les lettres du mot bonjour
    ... # bloc de code exécuté pour chaque valeur de l
# Boucle TANT QUE
while u < M:
    ... # bloc de code exécuté tant que u < M
```

Variables

```
n = 1 # n est de type entier
x = 1.0 # x est de type réel
s = "chaîne" # s est de type string
b = True # ou False, b est un booléen
```

```
l = [] # l est de type liste
l.append(e) # ajoute e à la liste
l.remove(e) # supprime e de la liste
k = l[0] # accès à l'élément de rang 0
```

Entrées/Sorties

```
print("n = ", n) # affiche la valeur de n
s = input("s = ") # demande la valeur de s => s est de type string
n = int(s) # convertit s en un entier
x = float(s) # convertit s en un réel
```

Opérations sur les variables

```
n = n + 1 # ajoute 1 à n
u = 2 * u # multiplie u par 2
x = 1 / 3 # x = 0.3333333333333333
k = 5 ** 2 # élève 5 au carré et l'affecte à k
q = a // b # affecte à q le quotient de la division euclidienne de a par b
r = a % b # affecte à r le reste de la division euclidienne de a par b
```

LES POLYNÔMES

Polynômes du 1^{er} degré

$$ax + b = 0 \iff x = \frac{-b}{a}$$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
ax + b	signe de (-a) 0		signe de a

Polynômes du 2nd degré

* Formes possibles :

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a(x - \alpha)^2 + \beta$$

$$= a(x - x_0)^2 \text{ ou } a(x - x_1)(x - x_2)$$

(forme développée)

(forme canonique)

(forme factorisée si elle existe)

* Pour dresser le tableau de variations :

$$\alpha = \frac{-b}{2a}$$

$$\beta = P(\alpha)$$

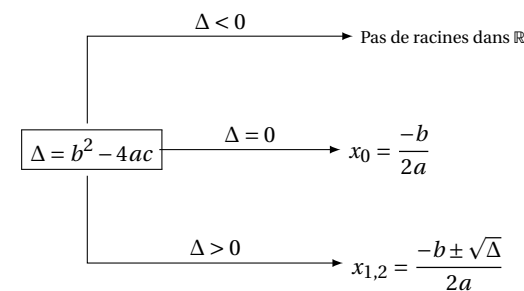
a > 0

x	$-\infty$	α	$+\infty$
P			

a < 0

x	$-\infty$	α	$+\infty$
P			

* Pour déterminer les racines du polynôme, la forme factorisée ou dresser le tableau de signes :



x	$-\infty$	$+\infty$
P(x)	signe de a	

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
P(x)	signe de a	0	signe de a

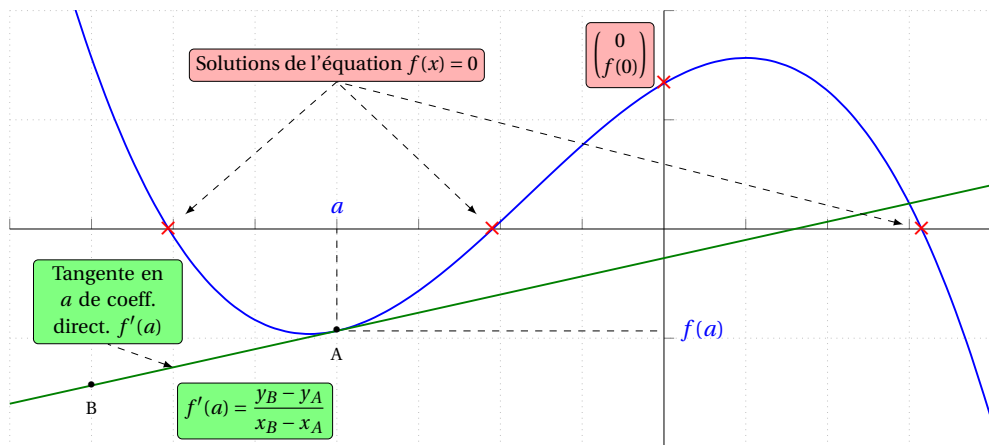
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
P(x)	sig. a	0	sig. (-a)	0	sig. a

* Propriétés des racines :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \text{ et } x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

LES FONCTIONS

• Lecture graphique



• Taux de variation entre a et $a+h$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

• Équation de la tangente en a

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

• Tableaux des dérivées

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

f	f'
ku	ku'
$u + v$	$u' + v'$
u^n	$nu'u^{n-1}$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
\sqrt{u}	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u'e^u$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$

• Pour étudier les variations d'une fonction f :

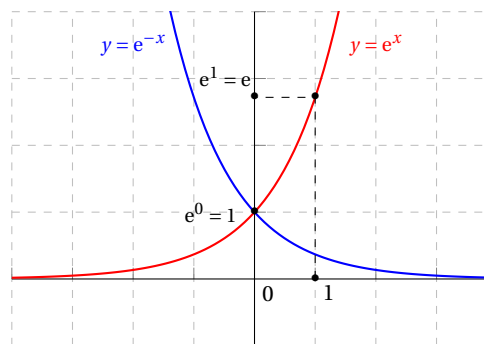
- je calcule $f'(x)$
- j'étudie le signe de $f'(x)$ en dressant son tableau de signes
- je déduis les variations de f : $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow$ ou $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$

• Pour étudier la position relative de \mathcal{C}_f par rapport à \mathcal{C}_g :

- je calcule la différence $d(x) = f(x) - g(x)$
- j'étudie le signe de $d(x)$ en dressant son tableau de signes
- je déduis la position de \mathcal{C}_f par rapport à \mathcal{C}_g : $d(x) < 0 \Rightarrow \mathcal{C}_f < \mathcal{C}_g$ ou $d(x) > 0 \Rightarrow \mathcal{C}_f > \mathcal{C}_g$

• Propriétés de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est définie sur \mathbb{R} et pour tout réel X , $e^X > 0$



$$e^0 = 1$$

$$e^1 = e \quad (\approx 2,718)$$

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$(e^a)^n = e^{a \times n}$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$e^{-b} = \frac{1}{e^b}$$

• Application concrète

EN ÉCONOMIE	Notation	Remarques
Coût total de production	$C(x)$ ou $C_T(x)$	coûts fixes : $C(0)$
Coût marginal	$C_m(x) = C'(x)$	coût de la dernière unité produite
Coût moyen	$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$	coût moyen unitaire
Recette ou chiffres d'affaires	$R(x) = p \times x$	p est le prix de vente unitaire
Bénéfice	$B(x) = R(x) - C(x)$	⚠ attention au $-$ devant $C(x)$
EN CINÉMATIQUE	Notation	Remarques
Position de l'objet	$f(t)$	position initiale : $f(0)$
Vitesse instantanée de l'objet	$v(t) = f'(t)$	à ne pas confondre avec la vitesse moyenne $v = \frac{d}{t}$

LES SUITES

Deux modes de génération

- * Explicite ou fonctionnelle (en fonction de n) : $u_n = f(n)$
- * Récurrent (en fonction du terme précédent) : $u_{n+1} = f(u_n)$

Deux types de suite particulière

Nature	ARITHMÉTIQUE	GÉOMÉTRIQUE
$u_{n+1} = f(u_n)$	$\begin{cases} u_p \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$	$\begin{cases} v_p \\ v_{n+1} = qv_n \end{cases}$
$u_n = f(n)$	$\begin{aligned} u_n &= u_0 + nr \\ &= u_p + (n-p)r \end{aligned}$	$\begin{aligned} v_n &= v_0 \times q^n \\ &= v_p \times q^{n-p} \end{aligned}$
Somme de u_p à u_n	$\underbrace{(n-p+1)}_{\text{nombre de termes}} \times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$	$\text{premier} \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$
Pour démontrer	$u_{n+1} - u_n = \dots = r$	$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \dots = q \\ v_{n+1} &= \dots = qv_n \end{aligned}$

Variations de suites

1. je calcule la différence $u_{n+1} - u_n$
2. j'étudie son signe
3. j'en déduis les variations de la suite u

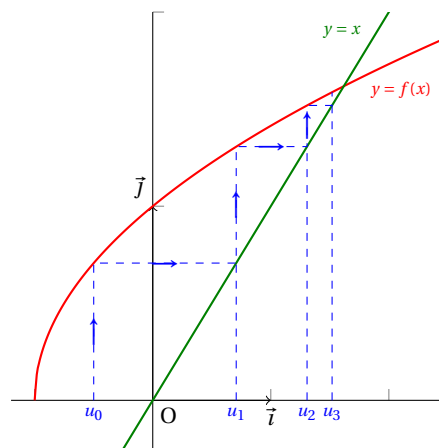
$$u_{n+1} - u_n \begin{cases} > 0 \implies (u_n) \text{ est strictement croissante} \\ < 0 \implies (u_n) \text{ est strictement décroissante} \\ = 0 \implies (u_n) \text{ est stationnaire ou constante} \end{cases}$$

⚠ Si $u_n = f(n)$ alors u a les mêmes variations que la fonction f qui la génère.

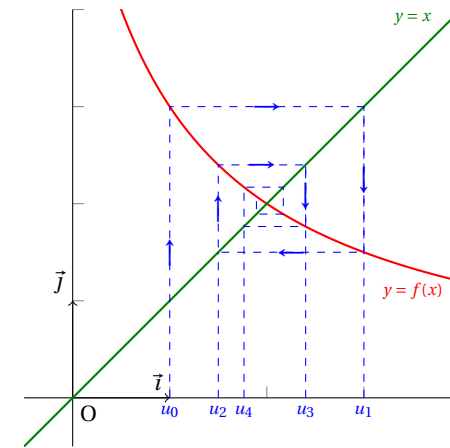
Calculer avec des pourcentages

t% de q	$\frac{t}{100} \times q$
Augmenter q de t%	$\left(1 + \frac{t}{100}\right) \times q$
Diminuer q de t%	$\left(1 - \frac{t}{100}\right) \times q$
Taux d'évolution entre v_0 et v_1	$\frac{v_1 - v_0}{v_0} \times 100$

Construction graphique des termes de (u_n) dans le cas d'une définition récurrente : $u_{n+1} = f(u_n)$



Suite croissante



Mode "escargot" (suite alternée)

1. On part de u_0
2. On prend son image par f : $u_1 = f(u_0)$
3. On "rabat" u_1 sur l'axe des abscisses par "projection horizontale" sur $y = x$
4. On répète cette procédure avec u_1 , puis u_2 ...

Algorithmes Python à connaître

Exemple à adapter en fonction de la suite étudiée, ici $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 5$.

```
##### Programme CALCUL #####
# calcule et affiche le terme de
# rang n demandé par l'utilisateur

# demander la valeur de n
n = int(input("n = "))
# initialisation u_0 = 1
u = 1
# boucle de calcul
for i in range(n):
    u = 2 * u + 5
print("u = ", u)
```

```
##### Programme SEUIL #####
# affiche le rang n à partir duquel
# u_n devient plus grand que M

# initialisation : u_0 = 1
n = 0
u = 1
while u < M: # tant que u_n < M
    # on calcule le terme suivant
    n = n + 1
    u = 2 * u + 5
print("n = ", n)
```

Remarques :

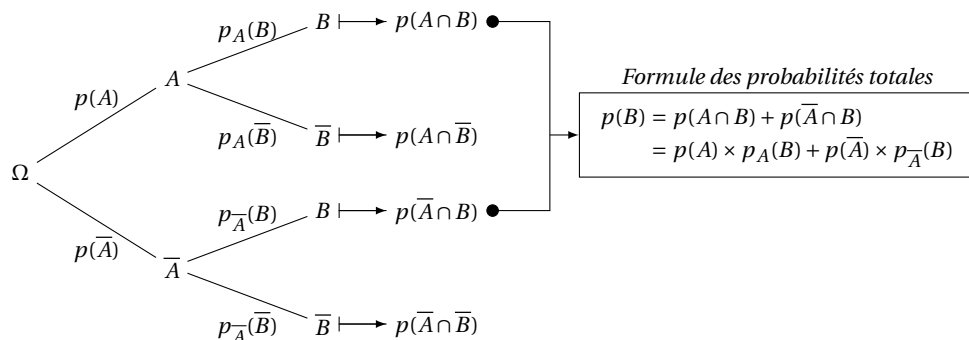
- dans l'algorithme de calcul, on peut afficher **tous les termes** jusqu'à u_n en plaçant `print("u = ", u)` dans la boucle `for`
- dans l'algorithme de seuil, on peut être amené à remplacer la condition `u < M` par `u > M`

LES PROBABILITÉS

◆ Formules fondamentales

Probabilité de A	$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments totaux}}$
Probabilité conditionnelle	$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$
Formule de la réunion	$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
Si A et B indépendants	$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$
Complémentarité de A et de \bar{A}	$p(A) + p(\bar{A}) = 1$

◆ Représentation par un arbre pondéré



◆ Représentation par un tableau

	A	\bar{A}	Total
B	$p(A \cap B)$	$p(\bar{A} \cap B)$	$p(B)$
\bar{B}	$p(A \cap \bar{B})$	$p(\bar{A} \cap \bar{B})$	$p(\bar{B})$
Total	$p(A)$	$p(\bar{A})$	1

Remarques :

- dans un tableau, on peut remplacer les probabilités par des effectifs
- dans un tableau, on lit "les intersections" et on calcule les probabilités conditionnelles
- dans un arbre, on lit les probabilités conditionnelles et on calcule "les intersections"

◆ Notion de variables aléatoires

* Loi de probabilité de X :

X	x_0	x_1	...	x_n
$p(X = x_i)$	$p(X = x_0)$	$p(X = x_1)$...	$p(X = x_n)$

* Formules à connaître

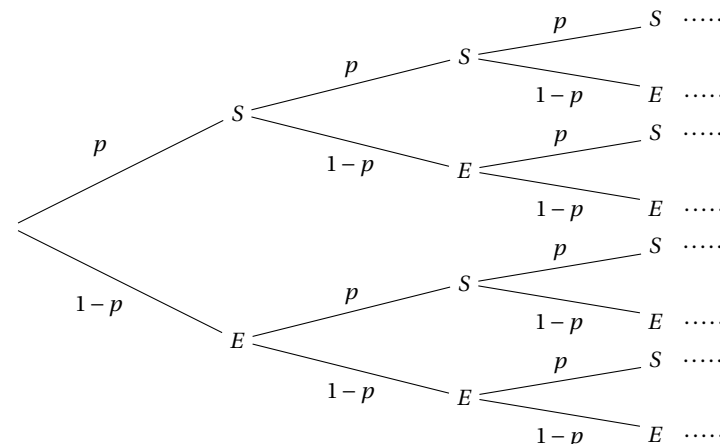
Espérance (ou moyenne) de X	$E(X) = \sum x_i \times p_i = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n$
Variance de X	$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum x_i^2 \times p_i - (E(X))^2$
Écart-type de X	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarques :

- les valeurs x_i peuvent être de nature très différentes (nombre de boules, somme d'argent, ...)
- l'espérance s'interprète en contexte par rapport à la nature des x_i
- l'écart-type permet de calculer la moyenne des écarts à la moyenne est permet d'accorder plus ou moins d'importance à la moyenne

◆ Répétition d'épreuves à l'identiques

On répète n fois de manière identique et indépendante une épreuve à deux issues : succès ou échec.



Probabilité d'obtenir exactement n succès

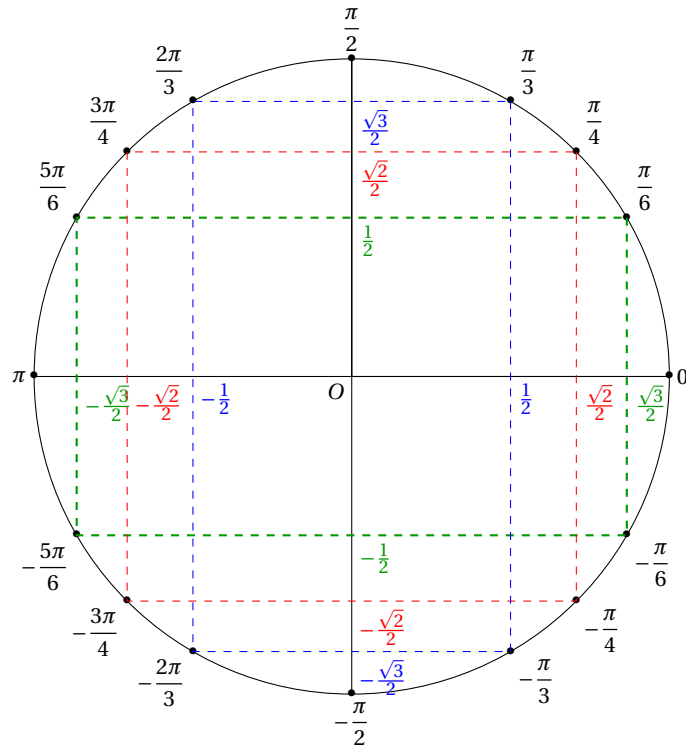
$$p(S)^n = p^n$$

Probabilité d'obtenir au moins un succès

$$1 - p(E)^n = 1 - (1 - p)^n$$

LA TRIGONOMÉTRIE

• Cercle trigonométrique et valeurs remarquables



• Formules de trigonométrie

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$$

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

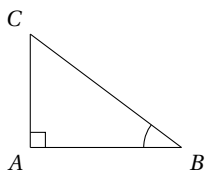
$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

• Trigonométrie dans le triangle rectangle (SOHCAHTOA ou CAHSOHTOA)

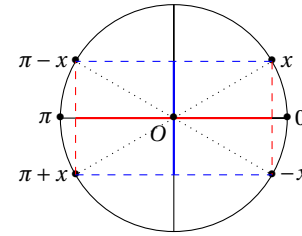


$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypothénuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypothénuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} = \frac{AC}{AB}$$

• Repérage sur le cercle trigonométrique



Les cosinus et les sinus sont soit égaux, soit opposés

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

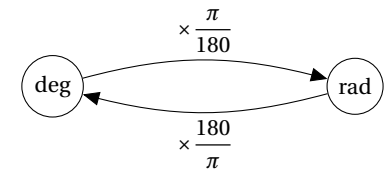
$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

• Mesure d'angle et conversion

Mesure principale	$\alpha \in]-\pi; \pi]$
Mesure secondaire	$\alpha + k \times 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}^*)$

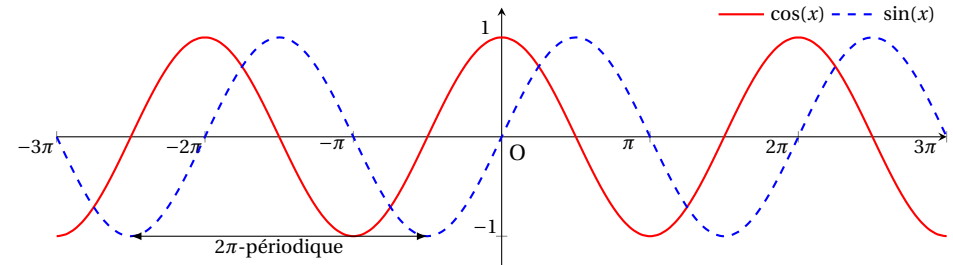


• Équations trigonométriques

$$\cos X = \cos a \iff \begin{cases} X = a + k \times 2\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ X = -a + k \times 2\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad \left| \quad \sin X = \sin a \iff \begin{cases} X = a + k \times 2\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ X = \pi - a + k \times 2\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

• Fonctions sinus et cosinus

* Courbes représentatives :



* Encadrement : pour tout réel x , on a $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$

* Périodicité : pour tout réel x , on a $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

* Parité : pour tout réel x , on a

$$\cos(-x) = \cos(x) \implies \text{symétrie par rapport à l'axe des ordonnées}$$

$$\sin(-x) = -\sin(x) \implies \text{symétrie par rapport à l'origine O}$$

LE PRODUIT SCALAIRE

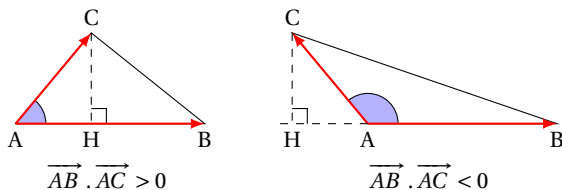
Propriétés importantes

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad | \quad (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad | \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}}$$

Formules à connaître

* Définition et projection

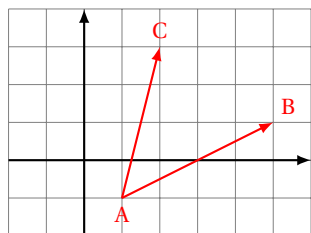
$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{AH} \\ &= \pm AB \times AH \\ &= \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) \end{aligned}$$



* Définition analytique

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} = xx' + yy'$$



* Identités remarquables

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \iff (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

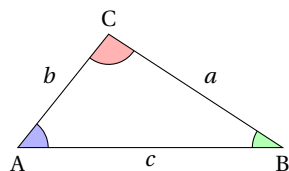
Formules d'Al-Kashi et loi des sinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \widehat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos \widehat{B}$$

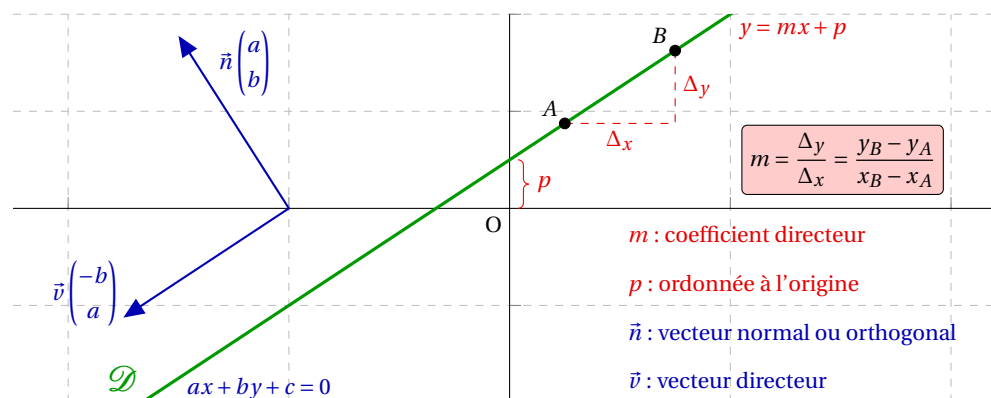
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos \widehat{C}$$

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$



LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Équation réduite et cartésienne de droite



Appartenance d'un point à une droite

- je détermine un point de \mathcal{D} en fixant x à une valeur quelconque et en isolant y
- je teste si un point appartient ou non à la droite en remplaçant x et y dans l'équation de \mathcal{D}

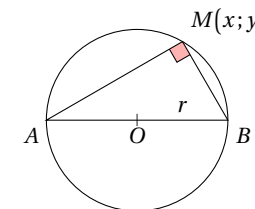
Équation cartésienne de cercle

$$\vec{AM} \perp \vec{BM} \iff \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_B \\ y - y_B \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

$$OM^2 = r^2 \iff (x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = r^2$$



Colinéarité de vecteurs et alignement de points

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ colinéaires } \iff xy' - x'y = 0$$

$$\iff \vec{u} = k\vec{v} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$A, B \text{ et } C \text{ alignés } \iff \vec{AB} \text{ et } \vec{AC} \text{ colinéaires}$$

Déterminer les coordonnées d'un point défini par une relation vectorielle

$$\vec{AE} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC} \iff \begin{cases} x_E - x_A = \alpha(x_B - x_A) + \beta(x_C - x_A) \\ y_E - y_A = \alpha(y_B - y_A) + \beta(y_C - y_A) \end{cases}$$

Intersections de droites

$$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \iff \begin{cases} \text{équation de } \mathcal{D}_1 \\ \text{équation de } \mathcal{D}_2 \end{cases}$$