Les Polynômes

Polynômes du 1^er^ degré

$$ax+b=0 \iff x=\frac{-b}{a}$$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		signe de $(-a)$	0	signe de a	

Polynômes du 2^nd^ degré

∗ *Formes possibles :*

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^2+bx+c && \text{(forme développée)}\\ &= a(x-\alpha)^2+\beta && \text{(forme canonique)}\\ &= a(x-x_0)^2 \text{ ou } a(x-x_1)(x-x_2) && \text{(forme factorisée si elle existe)} \end{aligned}$$

∗ *Pour dresser le tableau de variations :*

$$\boxed{\alpha=\frac{-b}{2a}} \qquad \boxed{\beta=P(\alpha)}$$

$a>0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
P		$\searrow$	β	$\nearrow$	

$a<0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
P		$\nearrow$	β	$\searrow$	

∗ *Pour déterminer les racines du polynôme, la forme factorisée ou dresser le tableau de signes :*

$\boxed{\Delta=b^2-4ac}$

- $\Delta<0 \longrightarrow$ Pas de racines dans $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	

- $\Delta=0 \longrightarrow x_0=\frac{-b}{2a}$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

- $\Delta>0 \longrightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		sig. a	0	sig. $(-a)$	0	sig. a	

∗ *Propriétés des racines :*

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a} \quad \text{et} \quad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Les Suites

Deux modes de génération

∗ *Explicite ou fonctionnelle (en fonction de n) : $u_n=f(n)$*

∗ *Récurrent (en fonction du terme précédent) : $u_{n+1}=f(u_n)$*

Deux types de suite particulière

Nature	Arithmétique	Géométrique
$u_{n+1}=f(u_n)$	$\begin{cases} u_p \\ u_{n+1}=u_n+r \end{cases}$	$\begin{cases} v_p \\ v_{n+1}=qv_n \end{cases}$
$u_n=f(n)$	$u_n = u_0+nr = u_p+(n-p)r$	$v_n = v_0\times q^n = v_p\times q^{n-p}$
Somme de u_p à u_n	nb termes $\times \dfrac{\text{premier}+\text{dernier}}{2}$	premier $\times \dfrac{1-q^{\text{nb termes}}}{1-q}$
Pour démontrer	$u_{n+1}-u_n=\cdots=r$	$v_{n+1}=\cdots=qv_n$

Variations de suites

1. je calcule la différence $u_{n+1}-u_n$
2. j'étudie son signe
3. j'en déduis les variations de la suite u

$$\boxed{u_{n+1}-u_n \begin{cases} >0 \implies (u_n) \text{ est strictement croissante}\\ <0 \implies (u_n) \text{ est strictement décroissante}\\ =0 \implies (u_n) \text{ est stationnaire ou constante} \end{cases}}$$

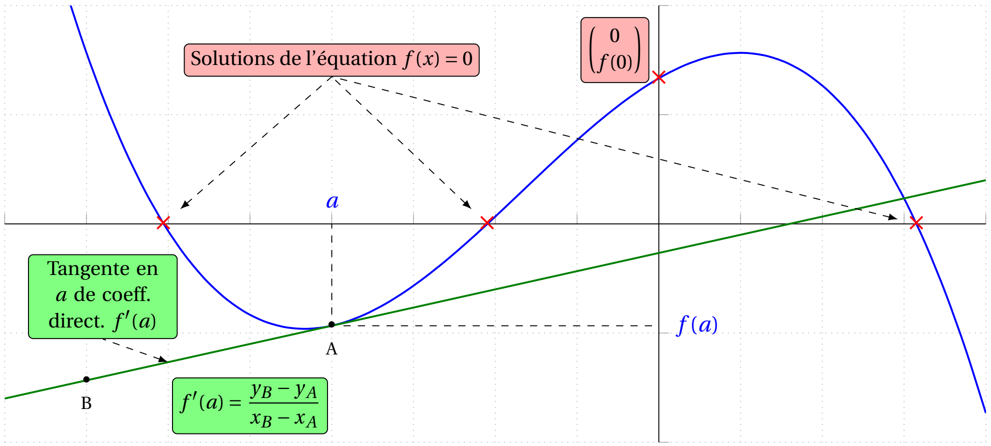
⚠ Si $u_n=f(n)$ alors u a les mêmes variations que la fonction f qui la génère.

Calculer avec des pourcentages

$t\%$ de q	$\dfrac{t}{100}\times q$
Augmenter q de $t\%$	$\left(1+\dfrac{t}{100}\right)\times q$
Diminuer q de $t\%$	$\left(1-\dfrac{t}{100}\right)\times q$
Taux d'évolution entre v_a et v_d	$\dfrac{v_a-v_d}{v_d}\times 100$

Les Fonctions

Lecture graphique



Taux de variation entre a et $a+h$

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)}$$

Équation de la tangente en a

$$\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$$

Tableaux des dérivées

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

f	f'
ku	ku'
$u+v$	$u'+v'$
u^n	$nu'u^{n-1}$
uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u'e^u$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$

Pour étudier les variations d'une fonction f :

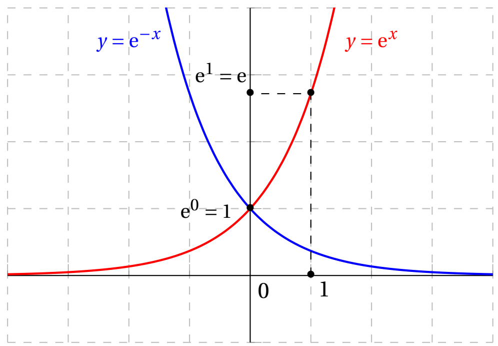
1. je calcule $f'(x)$
2. j'étudie le signe de $f'(x)$ en dressant son tableau de signes
3. je déduis les variations de f : $\boxed{f'(x)<0 \Longrightarrow f \searrow}$ ou $\boxed{f'(x)>0 \Longrightarrow f \nearrow}$

Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$:

1. je calcule la différence $d(x)=f(x)-g(x)$
2. j'étudie le signe de $d(x)$ en dressant son tableau de signes
3. je déduis la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$: $\boxed{d(x)<0 \Longrightarrow \mathscr{C}_f<\mathscr{C}_g}$ ou $\boxed{d(x)>0 \Longrightarrow \mathscr{C}_f>\mathscr{C}_g}$

Propriétés de la fonction exponentielle

$$\boxed{\text{La fonction exponentielle est définie sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout réel } X,\ e^X>0}$$



$$\begin{array}{rcl}
e^0 & = & 1\\
e^1 & = & e \quad (\simeq 2{,}718)\\
e^{a+b} & = & e^a\times e^b\\
(e^a)^n & = & e^{a\times n}\\
e^{a-b} & = & \dfrac{e^a}{e^b}\\
e^{-b} & = & \dfrac{1}{e^b}
\end{array}$$

Application concrète

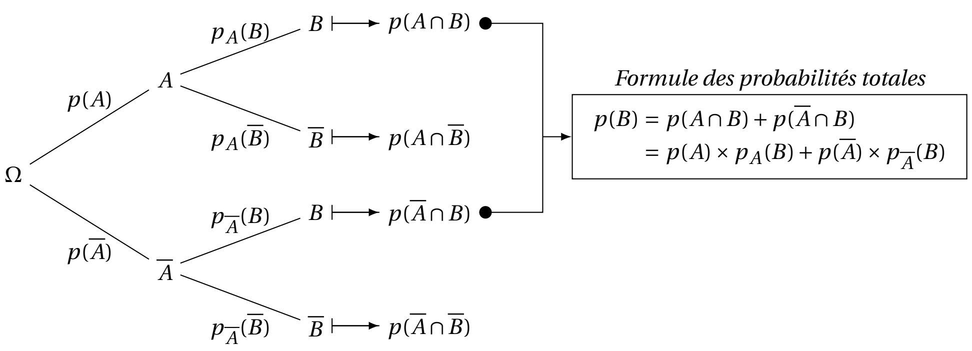
En économie	*Notation*	*Remarques*
Coût total de production	$C(x)$ ou $C_T(x)$	coûts fixes : $C(0)$
Coût marginal	$C_m(x)=C'(x)$	coût de la dernière unité produite
Coût moyen	$C_M(x)=\dfrac{C(x)}{x}$	coût moyen unitaire
Recette ou chiffres d'affaires	$R(x)=p\times x$	p est le prix de vente unitaire
Bénéfice	$B(x)=R(x)-C(x)$	⚠ attention au $-$ devant $C(x)$

Les Probabilités

Formules fondamentales

Probabilité de A	$p(A) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments totals}}$
Probabilité conditionnelle	$p_A(B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$
Formule de la réunion	$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$
Si A et B indépendants	$p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$
Complémentarité de A et de $\overline{A}$	$p(A) + p(\overline{A}) = 1$

Représentation par un arbre pondéré



Représentation par un tableau

	A	$\overline{A}$	Total
B	$p(A\cap B)$	$p(\overline{A}\cap B)$	$p(B)$
$\overline{B}$	$p(A\cap \overline{B})$	$p(\overline{A}\cap \overline{B})$	$p(\overline{B})$
Total	$p(A)$	$p(\overline{A})$	**1**

Remarques :

- dans un tableau, on peut remplacer les probabilités par des effectifs
- dans un tableau, on lit "les intersections" et on calcule les probabilités conditionnelles
- dans un arbre, on lit les probabilités conditionnelles et on calcule "les intersections"

Notion de variables aléatoires

∗ *Loi de probabilité de X :*

X	x_0	x_1	$\dots$	x_n
p_i	p_0	p_1	$\dots$	p_n

∗ *Formules à connaître*

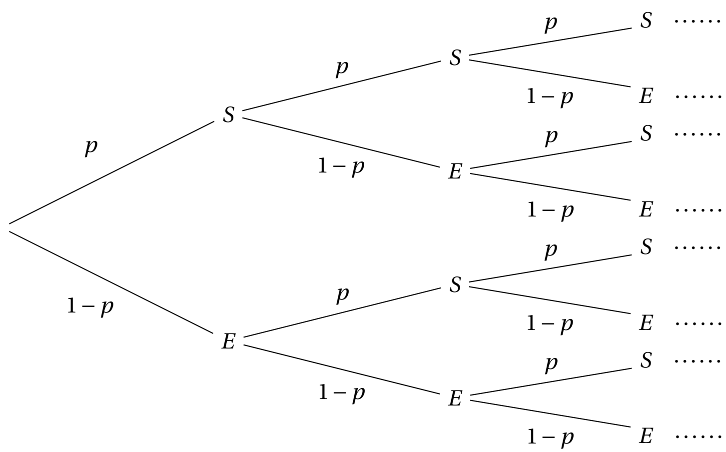
Éspérance (ou moyenne) de X	$E(X) = \sum x_i\times p_i = x_1\times p_1 + x_2\times p_2 + \ldots + x_n\times p_n$
Variance de X	$V(X) = \sum\left(x_i - E(X)\right)^2\times p_i = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$
Écart-type de X	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarques :

- les valeurs x_i peuvent être de nature très différentes (nombre de boules, somme d'argent, ...)
- l'espérance s'interprète en contexte par rapport à la nature des x_i
- l'écart-type mesure la dispersion des x_i autour de la moyenne. On dit aussi que c'est la moyenne des écarts à la moyenne.

Répétition d'épreuves à l'identiques

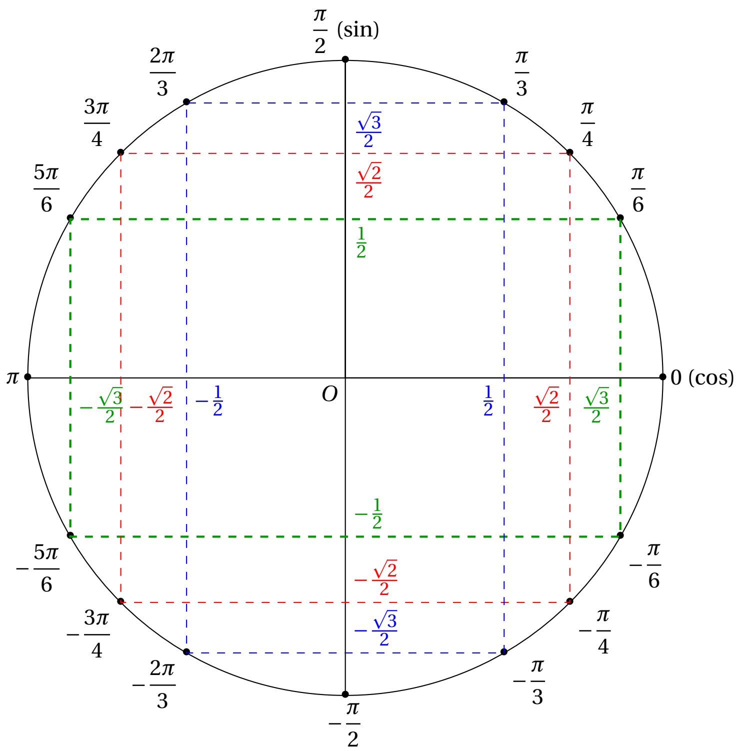
On répète n fois de manière identique et indépendante une épreuve à deux issues : succès ou échec.



Probabilité d'obtenir exactement n succès	$p(S)^n = p^n$
Probabilité d'obtenir au moins un succès	$1 - p(E)^n = 1 - (1-p)^n$

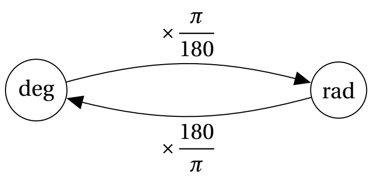
La Trigonométrie

Cercle trigonométrique et valeurs remarquables



Mesure d'angle et conversion

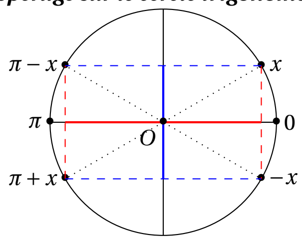
Mesure principale	$\alpha \in]-\pi\,;\pi]$
Mesure secondaire	$\alpha + k \times 2\pi$



On peut aussi faire un tableau de proportionnalité :

Degré	180	?
Radian	π	$\frac{\pi}{3}$

Repérage sur le cercle trigonométrique



Les cosinus et les sinus sont soit égaux, soit opposés

$\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$

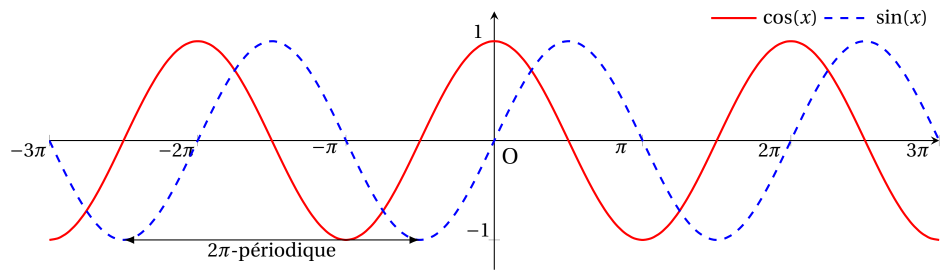
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$

$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

Formules, parité et périodicité d'une fonction

Encadrement	$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
Pythagore	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
Périodicité	$f(x+T) = f(x) \iff f$ est T-périodique
Paire	$f(-x) = f(x) \iff \mathscr{C}_f$ symétrique par rapport à $(y'Oy)$
Impaire	$f(-x) = -f(x) \iff \mathscr{C}_f$ symétrique par rapport à O

Courbes représentatives :



 Mathieu Pons https://mathete.net

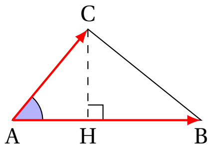
Le Produit Scalaire

➼ *Formules à connaître*

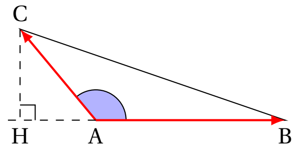
∗ *Formule de la projection*

Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) alors :

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \pm AB \times AH$$



$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} > 0$



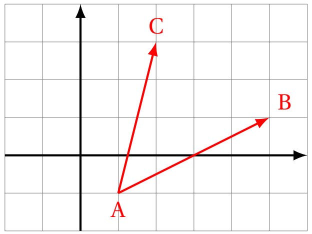
$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} < 0$

∗ *Formule analytique*

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = xx' + yy'$$



∗ *Formule du cosinus*

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} \iff \cos\widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$$

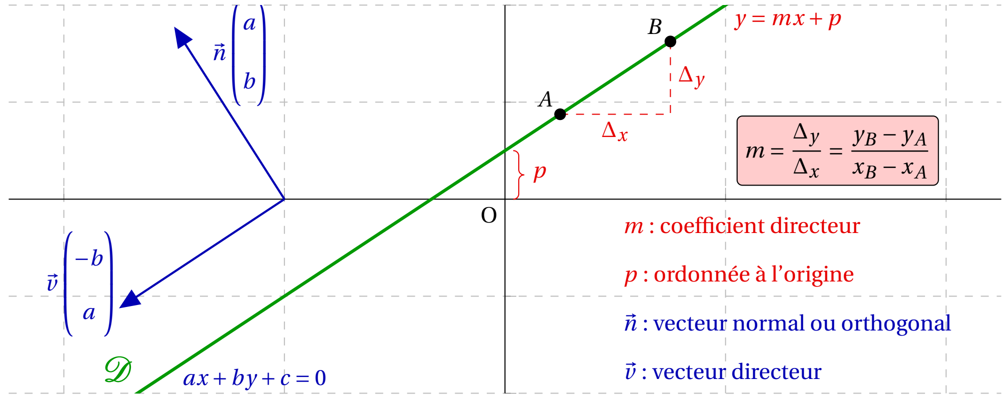
➼ *Orthogonalité de deux vecteurs*

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ orthogonaux} \iff \vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$$

$$\iff xx' + yy' = 0$$

La Géométrie Analytique

➼ *Équation réduite et cartésienne de droite*



➼ *Équation cartésienne de cercle*

Le cercle de centre A et de rayon r a pour équation :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$$

➼ *Colinéarité de deux vecteurs*

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ colinéaires} \iff \det(\vec{u}\,;\vec{v}\,) = 0$$

$$\iff xy' - x'y = 0$$

➼ *Équation cartésienne de droite*

Une équation cartésienne est de la forme $ax + by + c = 0$.
a et b se détermine en identifiant le vecteur directeur ou le vecteur normal de la droite.
On calcule c en remplaçant x et y par les coordonnées d'un point de la droite.

➼ *Intersections de droites*

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites, on résout le système d'équations composé des équations (cartésiennes ou réduites) des deux droites.

$$\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 \iff \begin{cases} \text{équation de } \mathscr{D}_1 \\ \text{équation de } \mathscr{D}_2 \end{cases}$$